

第六届中国大学生数学竞赛预赛试卷
(数学类, 2014年10月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	15	15	20	20	100
得分							

- 注意: 1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题 15 分) 已知空间的两条直线

$$l_1: \frac{x-4}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-8}{1},$$

$$l_2: \frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}.$$

- 1) 证明 l_1 和 l_2 异面;
2) 求 l_1 和 l_2 公垂线的标准方程;
3) 求连接 l_1 上的任一点和 l_2 上的任一点线段中点的轨迹的一般方程.

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 设 $f \in C[0, 1]$ 是非负严格单调增函数。

- 1) 证明: 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 存在唯一的 $x_n \in [0, 1]$, 使得

$$(f(x_n))^n = \int_0^1 (f(x))^n dx.$$

- 2) 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$

姓名: 准考证号: 所在院校: 专业: 考生座位号:

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

三、(本题 15 分) 设 V 为闭区间 $[0, 1]$ 上全体实函数构成的实向量空间, 其中向量加法与纯量乘法均为通常的。 $f_1, \dots, f_n \in V$. 证明以下两条等价:

1) $f_1, \dots, f_n$ 线性无关;

2) 存在 $a_1, \dots, a_n \in [0, 1]$ 使得 $\det(f_i(a_j)) \neq 0$, 这里 $\det$ 表示行列式。

得分	
评阅人	

四、(本题 15 分) 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有二阶导函数, $f(x), f'(x), f''(x)$ 都大于零, 假设存在正数 a, b 使得 $f''(x) \leq af(x) + bf'(x)$ 对一切 $x \in \mathbb{R}$ 成立。

(i) 求证: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0$.

(ii) 求证: 存在常数 c 使得 $f'(x) \leq cf(x)$.

(iii) 求使上面不等式成立的最小常数 c .

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

五、(本题 20 分) 设 m 为给定的正整数. 证明: 对任意的正整数 n, l , 存在 m 阶方阵 X 使得

$$X^n + X^l = I + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m-1 & m-2 & m-3 & \cdots & 1 & 0 \\ m & m-1 & m-2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

其中, I 表示 m 阶单位方阵。

得分	
评阅人	

六、(本题 20 分) 设 $\alpha \in (0, 1)$, $\{a_n\}$ 是正数列且满足

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lambda \in (0, +\infty).$$

求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k a_n = 0$, 其中 $k > 0$.